8 Vektoren Lösungen

Aufgabe 1

Berechne die Vektoren, mit

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) $a + b - c + d = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $d - c - b - a = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $3a - 2b + c = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}$

d) $a - \frac{1}{2}c + (-3)b + 2d = \begin{pmatrix} 29 \\ 19 \\ -13 \end{pmatrix}$

e) $2a - b + 5c - d = \begin{pmatrix} -9 \\ -14 \\ -18 \end{pmatrix}$

f) $3a - 5b + 4c + 2d = \begin{pmatrix} 32 \\ 14 \\ -34 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Berechne die Länge der Vektoren:

a) $\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 1$

b) $\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{17}$

c) $\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{50}$

d) $\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 3$

e) $\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{18}$

f) $\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 4$

Aufgabe 3

Bestimme das Skalarprodukt der Vektoren:

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -14$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} = -12$

Aufgabe 4

Bestimme den eingeschlossenen Winkel:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} = \arccos 0 = 90°$

Aufgabe 5

Berechne das Kreuzprodukt:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6

Überprüfe, ob die Vektoren linear abhängig sind. In diesem Fall stelle einen der Vektoren als Linearkombination der anderen dar. (Hinweis: Nutze den Gauss-Algorithmus)

a) ..

$$\begin{array}{cc|c} c_1 & c_2 & \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= 0 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ linear unabhängig

b) ..

c_1	c_2		
3	5	0	$\cdot(-\frac{5}{3})$
5	3	0	$\leftarrow$
3	5	0	
0	$-\frac{16}{3}$	0	

$$\begin{aligned} c_2 &= 0 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ linear unabhängig

c) ..

c_1	c_2	c_3		
1	7	17	0	$\cdot(-2)$
2	3	5	0	$\leftarrow$
1	7	17	0	
0	-11	-29	0	

$$\begin{aligned} c_3 &= t \\ c_2 &= -\frac{29}{11}t \\ c_1 &= \frac{16}{11}t \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ linear abhängig mit

$$-\frac{16}{11}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{29}{11}\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\5\end{pmatrix}$$

d) ..

c_1	c_2	c_3	
1	2	3	0
0	5	7	0
0	0	1	0

$$\begin{aligned} c_3 &= 0 \\ c_2 &= 0 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ linear unabhängig

e) ..

c_1	c_2	c_3			
7	3	10	0	$\leftarrow$	
2	-5	-3	0	$\cdot(-\frac{7}{2})$	$\cdot(-\frac{5}{2})$
5	8	13	0		$\leftarrow$
2	-5	-3	0		
0	$-\frac{41}{2}$	$-\frac{41}{2}$	0	$\cdot(-1)$	
0	$-\frac{41}{2}$	$-\frac{41}{2}$	0	$\leftarrow$	
2	-5	-3	0		
0	$-\frac{41}{2}$	$-\frac{41}{2}$	0		
0	0	0	0		

$$\begin{aligned} c_3 &= t \\ c_2 &= -t \\ c_1 &= -t \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ linear abhängig mit

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}$$

f) ..

c_1	c_2	c_3			
-2	1	7	0	$\cdot(-\frac{3}{2})$	$\cdot(2)$
-3	0	6	0	$\leftarrow$	
4	1	5	0		$\leftarrow$
-2	1	7	0		
0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$	0	$\leftarrow$	
0	3	19	0	$\cdot(\frac{1}{2})$	
-2	1	7	0		
0	3	19	0		
0	0	5	0		

$$\begin{aligned} c_3 &= 0 \\ c_2 &= 0 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ linear unabhängig

g) ..

c_1	c_2	c_3			
3	-2	-7	0	$\cdot(-\frac{7}{3})$	$\cdot(-\frac{5}{3})$
7	5	3	0	$\leftarrow$	
5	1	-3	0		$\leftarrow$
3	-2	-7	0		
0	$\frac{29}{3}$	$\frac{58}{3}$	0	$\leftarrow$	
0	$\frac{13}{3}$	$\frac{26}{3}$	0	$\cdot(-\frac{29}{13})$	
3	-2	-7	0		
0	$\frac{13}{3}$	$\frac{26}{3}$	0		
0	0	0	0		

$$\begin{aligned} c_3 &= t \\ c_2 &= -2t \\ c_1 &= t \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ linear abhängig mit

$$-\begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\3\\-3\end{pmatrix}$$

h) ..

c_1	c_2	c_3	c_4			
1	0	0	1	0	$\cdot(-1)$	$\cdot(-1)$
0	1	1	1	0		
1	1	3	0	0	$\leftarrow$	
1	1	2	1	0		$\leftarrow$
1	0	0	1	0		
0	1	1	1	0		$\leftarrow$
0	1	3	-1	0	$\leftarrow$	
0	1	2	0	0	$\cdot(-1)$	$\cdot(-1)$
1	0	0	1	0		
0	1	2	0	0		
0	0	-1	1	0	$\leftarrow$	
0	0	1	-1	0	$\cdot(1)$	
1	0	0	1	0		
0	1	2	0	0		
0	0	1	-1	0		
0	0	0	0	0		

$$\begin{aligned} c_4 &= t \\ c_3 &= t \\ c_2 &= -2t \\ c_1 &= -t \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ linear abhängig mit

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

i) ..

$$\begin{array}{cccc|ccc}
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot(-2) & \cdot(-1) \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & \leftarrow & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot(-1) & \\
0 & \text{-1} & 0 & 1 & 0 & & \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \leftarrow & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\
0 & \text{-1} & 0 & 1 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
c_4 &= 0\\
c_3 &= 0\\
c_2 &= 0\\
c_1 &= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ linear unabhängig