# 6 Vollständige Induktion Lösung

## 6.1 Gleichungen

### Aufgabe 1

**Induktionsanfang**: $n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2}$
**Induktionsvoraussetzung**: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
**Induktionsbehauptung**: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$
**Induktionsbeweis**:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) && |\text{Voraussetzung} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} && |(n+1)\ \text{Ausklammern} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && |\text{Umformen} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} && |\text{qed}
\end{aligned}$$

### Aufgabe 2

**Induktionsanfang**: $n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \frac{6}{6} = \frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}$
**Induktionsvoraussetzung**: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
**Induktionsbehauptung**: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$

**Induktionsbeweis**:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 && |\text{Voraussetzung} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} && |(n+1) \text{ Ausklammern} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} && |\text{Polynomdivision} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} && |\text{Umformen} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} && |\text{qed}
\end{aligned}$$

## Aufgabe 3

**Induktionsanfang**: $n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1} 2k = 2 \cdot 1 = 2 = 1^2 + 1$
**Induktionsvoraussetzung**: $\sum_{k=1}^{n} 2k = n^2 + n$
**Induktionsbehauptung**: $\sum_{k=1}^{n+1} 2k = (n+1)^2 + (n+1)$
**Induktionsbeweis**:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 2k &= \sum_{k=1}^{n} 2k + 2(n+1) && |\text{Voraussetzung} \\
&= n^2 + n + 2(n+1) && |\text{Ausmultiplizieren} \\
&= n^2 + n + 2n + 2 && |\text{Umordnen} \\
&= n^2 + 2n + 1 + n + 1 && |\text{Binomische Formel} \\
&= (n+1)^2 + (n+1) && |\text{qed}
\end{aligned}$$

## Aufgabe 4

**Induktionsanfang**: $n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$
**Induktionsvoraussetzung**: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
**Induktionsbehauptung**: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$

**Induktionsbeweis**:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} \\
=&\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)} && |\text{Voraussetzung} \\
=&\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
=&\frac{n \cdot (n+2)+1}{(n+1)(n+2)} && |\text{Ausmultiplizieren} \\
=&\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} && |\text{Binomische Formel} \\
=&\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} && |\text{Kürzen} \\
=&\frac{n+1}{n+2} && |\text{Umformen} \\
=&\frac{n+1}{(n+1)+1} && |\text{qed}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 5**

**Gesucht:** Formeln für $1+3+5+...+2n-1 = \sum_{k=1}^{n} 2k-1$
**Finden der Vermutung:**

$$\sum_{k=1}^{1} 2k-1 = 1 \qquad \sum_{k=1}^{3} 2k-1 = 9$$

$$\sum_{k=1}^{2} 2k-1 = 4 \qquad \sum_{k=1}^{4} 2k-1 = 16$$

**Zu Zeigen**: $\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = n^2$
**Induktionsanfang**: $n_0 = 1$
**Induktionsvoraussetzung**: $\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = n^2$
**Induktionsbehauptung**: $\sum_{k=1}^{n+1} 2k-1 = (n+1)^2$
**Induktionsbeweis**:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 2k-1 &= \sum_{k=1}^{n} 2k-1+2(n+1)-1 && |\text{nach Voraussetzung} \\
&= n^2+2n+2-1 && |\text{Zusammenfassen} \\
&= n^2+2n+1 && |\text{Binomische Formel} \\
&= (n+1) && |\text{qed}
\end{aligned}$$

### Aufgabe 6

**Gesucht:** Formeln für $4 + 8 + 12 + ... + 4n = 2n(n+1) = \sum_{k=1}^{n} 4k$
**Finden der Vermutung:**

$$\sum_{k=1}^{1} 4k = 4 = 2 \cdot 1 \cdot 2 \qquad \sum_{k=1}^{3} 4k = 24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$\sum_{k=1}^{2} 4k = 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \qquad \sum_{k=1}^{4} 4k = 40 = 2 \cdot 4 \cdot 5$$

**Zu Zeigen**: $\sum_{k=1}^{n} 4k = 2n(n+1)$
**Induktionsanfang**: $n_0 = 1$
**Induktionsvoraussetzung**: $\sum_{k=1}^{n} 4k = 2n(n+1)$
**Induktionsbehauptung**: $\sum_{k=1}^{n+1} 4k = 2(n+1)((n+1)+1)$
**Induktionsbeweis**:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 4k &= \sum_{k=1}^{n} 4k + 4(n+1) && |\text{Voraussetzung}\\
&= 2n(n+1) + 4(n+1) && |2 \text{ Ausklammern}\\
&= 2(n(n+1) + 2(n+1)) && |(n+1) \text{ Ausklammern}\\
&= 2(n+1)(n+2) &&\\
&= 2(n+1)((n+1)+1) && |\text{qed}
\end{aligned}$$

### Aufgabe 7

**Induktionsanfang**: $n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{1} q^k = 1 + q = \frac{(1+q)(1-q)}{(1-q)} = \frac{1-q^{1+1}}{1-q}$
**Induktionsvoraussetzung**: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
**Induktionsbehauptung**: $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}$
**Induktionsbeweis**:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} && |\text{Voraussetzung}\\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} &&\\
&= \frac{(1-q^{n+1}) + (1-q)q^{n+1}}{1-q} && |\text{Zusammenfassen}\\
&= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} && |\text{Umformen}\\
&= \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q} && |\text{qed}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 8**

**Induktionsanfang**: $n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2\cdot 1+1}$
**Induktionsvoraussetzung**: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$
**Induktionsbehauptung**: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$
**Induktionsbeweis**:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}$$
$$|\text{Voraussetzung}$$

$$= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$= \frac{n\cdot(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \qquad |\text{Ausmultiplizieren}$$
$$= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \qquad |\text{Polynomdivision}$$
$$= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \qquad |\text{Kürzen}$$
$$= \frac{n+1}{2n+3} \qquad |\text{Umformen}$$
$$= \frac{n+1}{2(n+1)+1} \qquad |\text{qed}$$

**Aufgabe 9**

**Induktionsanfang**: $n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1}$
**Induktionsvoraussetzung**: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$
**Induktionsbehauptung**: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}$

**Induktionsbeweis**:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} && |\text{Voraussetzung} \\
&= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 + \frac{-2(n+2)+(n+1)}{2^{n+1}} && |\text{Zusammenfassen} \\
&= 2 + \frac{-(n+3)}{2^{n+1}} && |(-)\ \text{Vorziehen} \\
&= 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}} && |\text{qed}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 10**

**Induktionsanfang**: $n_0 = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{0} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 3\left(1 - \frac{2}{3}^{0+1}\right)$
**Induktionsvoraussetzung**: $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$
**Induktionsbehauptung**: $\sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{(n+1)+1}\right)$
**Induktionsbeweis**:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^k &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} && |\text{Voraussetzung} \\
&= 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} && |\text{R. Br. mit 3 erweitern} \\
&= 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{3^{n+2}} && |\text{3 Ausklammern} \\
&= 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}\right) \\
&= 3 \cdot \left(1 + \frac{-3 \cdot 2^{n+1} + 2^{n+1}}{3^{n+2}}\right) \\
&= 3 \cdot \left(1 + \frac{-2 \cdot 2^{n+1}}{3^{n+2}}\right) && |\text{Potenzgesetze} \\
&= 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right) && |\text{Umformen} \\
&= 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{(n+1)+1}\right) && |\text{qed}
\end{aligned}$$

## 6.2 Teilbarkeitsprobleme

### Aufgabe 1

**Induktionsanfang**: $n_0 = 1 \Rightarrow 8|9^1 - 1 \Leftrightarrow 8|8$
**Induktionsvoraussetzung**: $8|9^n - 1$
**Induktionsbehauptung**: $8|9^{n+1} - 1$
**Induktionsbeweis**: $(m_x \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}
9^{n+1} - 1 &= 9 \cdot 9^n - 1 && |\text{0-Erweiterung} \\
&= 9 \cdot 9^n - 9 + 9 - 1 && |\text{9 Ausklammern} \\
&= 9 \cdot (9^n - 1) + 8 && |\text{Voraussetzung} \\
&= 9 \cdot 8 \cdot m_1 + 8 && |\text{8 Ausklammern} \\
&= 8 \cdot (9m_1 + 1) \\
&= 8 \cdot m_2 && |\text{qed}
\end{aligned}$$

### Aufgabe 2

**Induktionsanfang**: $n_0 = 1 \Rightarrow 6|7^1 - 1 \Leftrightarrow 6|6$
**Induktionsvoraussetzung**: $6|7^n - 1$
**Induktionsbehauptung**: $6|7^{n+1} - 1$
**Induktionsbeweis**: $(m_x \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}
7^{n+1} - 1 &= 7 \cdot 7^n - 1 && |\text{0-Erweiterung} \\
&= 7 \cdot 7^n - 7 + 7 - 1 && |\text{7 Ausklammern} \\
&= 7 \cdot (7^n - 1) + 6 && |\text{Voraussetzung} \\
&= 7 \cdot 6 \cdot m_1 + 6 && |\text{6 Ausklammern} \\
&= 6 \cdot (7m_1 + 1) \\
&= 6 \cdot m_2 && |\text{qed}
\end{aligned}$$

### Aufgabe 3

**Induktionsanfang.**: $n_0 = 1 \Rightarrow a - 1|a^1 - 1$
**Induktionsvoraussetzung**: $a - 1|a^n - 1$
**Induktionsbehauptung**: $a - 1|a^{n+1} - 1$

**Induktionsbeweis**: $(m_x \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} a^{n+1} - 1 &= a \cdot a^n - 1 && |0\text{-Erweiterung} \\ &= a \cdot a^n - a + a - 1 && |a \text{ Ausklammern} \\ &= a \cdot (a^n - 1) + (a - 1) && |\text{Voraussetzung} \\ &= a \cdot (a-1) \cdot m_1 + (a - 1) && |(a-1) \text{ Ausklammern} \\ &= (a-1) \cdot (am_1 + 1) \\ &= (a-1) \cdot m_2 && |\text{qed} \end{aligned}$$

### Aufgabe 4

**Induktionsanfang**: $n_0 = 1 \Rightarrow 3|1^3 + 6 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 \Leftrightarrow 3|21$
**Induktionsvoraussetzung**: $3|n^3 + 6n^2 + 14n$
**Induktionsbehauptung**: $3|(n+1)^3 + 6(n+1)^2 + 14(n+1)$
**Induktionsbeweis**: $(m_x \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} &(n+1)^3 + 6(n+1)^2 + 14(n+1) \\ =&n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 6n^2 + 12n + 6 + 14n + 14 && |\text{Sortieren} \\ =&(n^3 + 6n^2 + 14n) + 3n^2 + 15n + 21 && |\text{Voraussetzung} \\ =&3 \cdot m_1 + 3n^2 + 15n + 21 && |3 \text{ Ausklammern} \\ =&3 \cdot (m_1 + n^2 + 5n + 7) \\ =&3 \cdot m_2 && |\text{qed} \end{aligned}$$

### Aufgabe 5

**Induktionsanfang**: $n_0 = 1 \Rightarrow 3|2^{2 \cdot 1} - 1 \Leftrightarrow 3|4 - 1 \Leftrightarrow 3|3$
**Induktionsvoraussetzung**: $3|2^{2n} - 1$
**Induktionsbehauptung**: $3|2^{2(n+1)} - 1$
**Induktionsbeweis**: $(m_x \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} 2^{2(n+1)} - 1 &= 4 \cdot 2^{2n} - 1 && |0\text{-Erweiterung} \\ &= 4 \cdot 2^{2n} - 4 + 4 - 1 && |4 \text{ Ausklammern} \\ &= 4 \cdot (2^{2n} - 1) + 3 && |\text{Voraussetzung} \\ &= 4 \cdot 3 \cdot m_1 + 3 && |3 \text{ Ausklammern} \\ &= 3 \cdot (4m_1 + 1) \\ &= 3 \cdot m_2 && |\text{qed} \end{aligned}$$

### Aufgabe 6

**Induktionsanfang**: $n_0 = 1 \Rightarrow 6|1^3 - 1 \Leftrightarrow 6|0$
**Induktionsvoraussetzung**: $6|n^3 - n$

**Induktionsbehauptung**: $6|(n+1)^3-(n+1)$
**Induktionsbeweis**: $(m_x \in \mathbb{N} \cup 0)$

$$\begin{aligned}
&(n+1)^3-(n+1) \\
=&n^3+3n^2+3n+1-n-1 && |\text{Ordnen} \\
=&(n^3-n)+3n^2+3n && |\text{Voraussetzung} \\
=&6\cdot m_1+3n^2+3n && |\text{Annahme: } 6|3n^2+3n \\
\stackrel{?}{=}&6\cdot m_1+6\cdot m_2 \\
=&6\cdot(m_1+m_2) \\
=&6\cdot m_3
\end{aligned}$$

**Noch zu zeigen**: $6|3n^2+3n$
**Induktionsanfang**: $n_0=1 \Rightarrow 6|3\cdot 1^2+3\cdot 1 \Leftrightarrow 6|6$
**Induktionsvoraussetzung**: $6|3n^2+3n$
**Induktionsbehauptung**: $6|3(n+1)^2+3(n+1)$
**Induktionsbeweis**: $(m_x \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}
3(n+1)^2+3(n+1) &= 3n^2+6n+3+3n+3 && |\text{Ordnen} \\
&= (3n^2+3n)+6n+6 && |\text{Voraussetzung} \\
&= 6\cdot m_1+6n+6 && |\text{6 Ausklammern} \\
&= 6\cdot(m_1+n+1) \\
&= 6\cdot m_2 && |\text{qed}
\end{aligned}$$

### Aufgabe 7

**Induktionsanfang**: $n_0=1 \Rightarrow 6|3\cdot 1^2+9\cdot 1 \Leftrightarrow 6|12$
**Induktionsvoraussetzung**: $6|3n^2+9n$
**Induktionsbehauptung**: $6|3(n+1)^2+9(n+1)$
**Induktionsbeweis**: $(m_x \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}
3(n+1)^2+9(n+1) &= 3n^2+6n+3+9n+9 && |\text{Ordnen} \\
&= (3n^2+9n)+6n+12 && |\text{Voraussetzung} \\
&= 6\cdot m_1+6n+12 && |\text{6 Ausklammern} \\
&= 6\cdot(m_1+n+2) \\
&= 6\cdot m_2 && |\text{qed}
\end{aligned}$$

## 6.3 Ungleichung

### Aufgabe 1 - Bernoulli-Ungleichung

**Induktionsanfang**: $n_0=1 \Rightarrow (1+x)^1=1+x \geq 1+1\cdot x$
**Induktionsvoraussetzung**: $(1+x)^n \geq 1+nx$

**Induktionsbehauptung**: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$
**Induktionsbeweis**:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) && |\text{Voraussetzung} \\
&\geq (1+nx)\cdot(1+x) && |\text{Ausmultiplizieren} \\
&= 1+x+nx+nx^2 && |x \text{ teilweise ausklammern} \\
&= 1+(n+1)x+nx^2 && |\text{da } nx^2 \geq 0 \\
&\geq 1+(n+1)x && |\text{qed}
\end{aligned}$$

## Aufgabe 2

**Induktionsanfang**: $n_0 = 6$
$n = 5 \Rightarrow 5^2 + 10 = 35 < 32 = 2^5$ falsche Aussage
$n = 6 \Rightarrow 6^2 + 10 = 46 < 64 = 2^6$ wahre Aussage
**Induktionsvoraussetzung**: $n^2 + 10 < 2^n$
**Induktionsbehauptung**: $(n+1)^2 + 10 < 2^{n+1}$
**Induktionsbeweis**:

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 + 10 &= n^2 + 2n + 1 + 10 && |\text{Voraussetzung} \\
&< 2^n + 2n + 1 && |\text{da } 2n < 2n+1 < n^2,\ n \geq 3 \\
& && |\text{Vgl. Aufgabe 3} \\
&< 2^n + n^2 + 1 && |\text{da } 1 < 10 \\
&< 2^n + n^2 + 10 && |\text{Voraussetzung} \\
&< 2^n + 2^n && |\text{Zusammenfassen} \\
&= 2 \cdot 2^n && |\text{Potenzgesetze} \\
&= 2^{n+1} && |\text{qed}
\end{aligned}$$

## Aufgabe 3

**Induktionsanfang**: $n_0 = 3 \Rightarrow 3^2 = 9 > 7 = 2 \cdot 3 + 1$
**Induktionsvoraussetzung**: $n^2 > 2n + 1$
**Induktionsbehauptung**: $(n+1)^2 > 2(n+1) + 1$
**Induktionsbeweis**:

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 && |\text{Voraussetzung} \\
&> 2n + 1 + 2n + 1 && |\text{Ordnen} \\
&= 2n + 2 + 2n && \\
&= 2(n+1) + 2n && |\text{da } 2n > 1 \text{ mit } n \in \mathbb{N} \\
&> 2(n+1) + 1 && |\text{qed}
\end{aligned}$$

### Aufgabe 4

**Induktionsanfang**: $n_0 = 5 \Rightarrow 2^5 = 32 > 25 = 5^2$
**Induktionsvoraussetzung**: $2^n > n^2$
**Induktionsbehauptung**: $2^{n+1} > (n+1)^2$
**Induktionsbeweis**:

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2^n \cdot 2 && |\text{Voraussetzung} \\
&> n^2 \cdot 2 && |\text{als Summe schreiben} \\
&= n^2 + n^2 && |n^2 > 2n+1 \text{ Vgl. Aufg. 3} \\
&> n^2 + 2n + 1 && |\text{Binomische Formel} \\
&= (n+1)^2 && |\text{qed}
\end{aligned}$$

### Aufgabe 5

**Induktionsanfang**: $n_0 = 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} > \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
**Induktionsvoraussetzung**: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$
**Induktionsbehauptung**: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n+1}$
**Induktionsbeweis**:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} && |\text{Voraussetzung} \\
&> \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&\overset{?}{>} \sqrt{n+1}
\end{aligned}$$

**Noch zu zeigen**:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &> \sqrt{n+1} && |\cdot\sqrt{n+1} \\
\sqrt{n\cdot(n+1)} + 1 &> n+1 && |-1 \\
\sqrt{n^2+n} &> n && |n^2 \text{ Ausklammern} \\
\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} &> n && |\text{teilweise Wurzel ziehen} \\
n\sqrt{1+\frac{1}{n}} &> n && |\div n, \text{ da } n > 0 \\
\sqrt{1+\frac{1}{n}} &> 1 && |\text{wahre Aussage } \forall n \in \mathbb{N} \\
& && |\text{qed}
\end{aligned}$$

## Aufgabe 6

**Induktionsanfang**: $n_0 = 3 \Rightarrow \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{86}{120} > \frac{65}{120} = \frac{13}{24}$
**Induktionsvoraussetzung**: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \frac{13}{24}$
**Induktionsbehauptung**: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+k} > \frac{13}{24}$
**Induktionsbeweis**:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+k} && |\text{Indexverschiebung} \\
=&\sum_{k+2}^{n+2} \frac{1}{n+k} && |\text{Summanden abspalten} \\
=&\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} && |\text{0-Erweiterung} \\
=&\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} && |\text{Indexverschiebung} \\
=&\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} && |\text{Voraussetzung} \\
>&\frac{13}{24} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} && |\text{Zusammenfassen} \\
=&\frac{13}{24} + \frac{-(2n+1)\cdot 2 + 2(n+1) + (2n+1)}{(2n+1)\cdot 2(n+1)} && |\text{weiter Zusammenfassen} \\
=&\frac{13}{24} + \frac{1}{(2n+1)\cdot 2(n+1)} && |\text{da } \frac{1}{(2n+1)\cdot 2(n+1)} > 0 \\
>&\frac{13}{24} && |\text{qed}
\end{aligned}
$$