5. Wenn die Seitenlänge des Würfels maximal sein soll, muss der Durchmesser der Kugel gleich der Diagnoalen des Würfels sein.

$$\begin{aligned} r &= 1 \text{ (Radius der Kugel)} \\ a &= \text{ (Kante des Wuerfels)} \\ D &= a\sqrt{3} \text{ (Diagonale des Wuerfels)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2r &= a\sqrt{3} \\ a &= \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

7.2 Exponentialfunktionen und Logarithmus

1. a) $1 = e^x \rightarrow x = 0$
   b) $8 = 2^x \rightarrow x = 3$
   c) $3 = 5e^x \rightarrow x = ln(\frac{3}{5})$
   d) $e = \frac{e^x}{e} \rightarrow x = 2$
   e) $9 = e^{cx} \rightarrow x = \frac{ln(9)}{c}$
   f) $3 = log_2(x) \rightarrow x = 8$
   g) $0 = log_{42}(x) \rightarrow x = 1$
   h) $0 = 5log_5(x) \rightarrow x = 1$
   i) $9 = 3ln(e^x) \rightarrow x = 3$
2. a) $lg2 + lg5 = lg10 = 1$
   b) $lg5 + lg6 - lg3 = lg10 = 1$
   c) $3lna + 5lnb - lnc = ln(\frac{a^3b^5}{c})$ für $c \neq 0$
   d) $2lnv - lnv = ln(v^2) - lnv = ln(v)$ für $v \neq 0$
   e) $\frac{1}{2}log_7 9 - \frac{1}{4}log_7 81 = log_7\sqrt{9} - log_7\sqrt[4]{81} = 0$
   f)

$$\begin{aligned} log_3(x-4) + log_3(x+4) &= 3 \\ log_3((x-4)(x+4)) &= 3 \\ log_3(x^2-16) &= 3 \\ x^2 - 16 &= 3^3 \\ x &= \pm\sqrt{43} \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
2log_2(4-x)+4 &= log_2(x+5)-1\\
5 &= log_2(x+5)-log_2(4-x)^2\\
5 &= log_2(\frac{x+5}{(4-x)^2})\\
2^5 &= \frac{x+5}{(4-x)^2}\\
32(4-x)^2 &= x+5\\
32(16-8x+x^2) &= x+5\\
512-256x+32x^2 &= x+5\\
32x^2-257x+507 &= 0\\
x^2-\frac{257}{32}x+\frac{507}{32} &= 0\\
x_1 &= \frac{1}{64}(257+\sqrt{1157})\\
x_2 &= \frac{1}{64}(257-\sqrt{1157})
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
log_5 x &= log_5 6-2log_5 3\\
0 &= log_5 6-log_5(3^2)-log_5 x\\
0 &= log_5(\frac{6}{9x})\\
1 &= \frac{2}{3x}\\
x &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

3. $N(t)=N_0\cdot e^{kt}$
   für $N_0=100\ und\ k=0.2$
   $N(t)=100\cdot e^{0.2t}$

   a)

t	$N(t)$		
5	$100e^1$	$\approx$	272
10	$100e^2$	$\approx$	783
100	$100e^{20}$	$\approx$	$4,9\cdot 10^{10}$

b) A - Anzahl der Bakterien

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 \cdot e^{kt} \\ \frac{N(t)}{N_0} &= e^{kt} \\ ln(\frac{N(t)}{N_0}) &= kt \cdot ln(e) \\ t &= 5ln(\frac{N(t)}{100}) \end{aligned}$$

A	t		
500	$5ln(5)$	$\approx$	8
10000	$5ln(100)$	$\approx$	23

Anmerkung: Rundungswerte sind nur zusätzliche Infos, ln-Ergebnisse können errechnet werden

7.3 Kurvendiskussion, Differentiation, Integration

1. a) $(6x^2 - 5x + 7)' = 12x - 5$
   b) $(25x^4)' = 100x^3$
   c) $(x(x-7))' = 1 \cdot (x-7) + x \cdot 1 = 2x - 7$
   d) $((x^2+1)(x+5))' = 2x \cdot (x+5) + (x^2+1) \cdot 1 = 2x^2 + 10x + x^2 + 1 = 3x^2 + 10x + 1$
   e) $((x-2)e^x)' = 1 \cdot e^x + (x-2) \cdot e^x = e^x(x-1)$
   f) $(\ln(x^3 - 9))' = \frac{3x^2}{x^3-9}$
   g) $((2x-3)^5)' = 5(2x-3)^4 \cdot 2 = 10(2x-3)^4$
   h) $(\sin(2x))' = 2\cos(2x)$
   i) $(\frac{1}{x^2-9})' = \frac{-2x}{(x^2-9)^2}$

2. a) $\int 3x^2 dx = x^3 + c$
   b) $\int (5x^3 - 2) dx = \frac{5}{4}x^4 - 2x + c$
   c) $\int (x-4)(x+1) dx = \int x^2 - 3x - 4 = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 4x + c$
   d) $\int \frac{2}{x} dx = 2\ln x + c$
   e) $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$

3. a) $\int_0^2 3x^2 dx = [x^3]_0^2 = [2^3] - [0^3] = 8$
   b) $\int_1^5 x+1 dx = [\frac{1}{2}x^2 + x]_1^5 = [\frac{1}{2}5^2 + 5] - [\frac{1}{2}1^2 + 1] = (\frac{25}{2} + 5) - \frac{3}{2} = \frac{35}{2} - \frac{3}{2} = 16$